Практическая работа № 1

Тема: Графическое изображение графов.

Цель: изучить основы теоретико-множественного и графического представлений графов, простейших свойств графов, получить практический навык задания и визуализации графа на плоскости; закрепить навыки построения графов по образцу в графических средах (программы для графического представления графов).

Задачи:

1. Закрепить знания основных понятий теории графов.
2. Приобрести практические умения использования специального программного обеспечения для моделирования.

Материальное обеспечение:

Программы для графического представления графов: grin_rus, Grafoanalizator1.3.3 rus, windisc ru.

Теоретическая часть:

Графические представления в широком смысле – любые наглядные отображения исследуемой системы, процесса, явления на плоскости. К ним могут быть отнесены рисунки, чертежи, графики зависимостей характеристик, планы-карты местности, блок-схемы процессов, диаграммы и т. д. Такие изображения наглядно представляют различные взаимосвязи, взаимообусловленности: топологическое (пространственное) расположение объектов, хронологические (временные) зависимости процессов и явлений, логические, структурные, причинно-следственные и другие взаимосвязи.

Графические представления – удобный способ иллюстрации содержания различных понятий, относящихся к другим способам формализованных представлений (например, диаграммы Венна и другие графические иллюстрации основных теоретико-множественных и логических представлений).

Всё более распространенными становятся представления количественных характеристик, взаимосвязей между объектами в виде разного рода одно-, двух- и более мерных гистограмм, круговых диаграмм, других аналогичных способов представления в виде тех или иных геометрических фигур, по наглядным характеристикам которых (высоте, ширине, площади, радиусу и пр.) можно судить о количественных соотношениях сравниваемых объектов, значительно упрощая их анализ.

Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящихся к графическим представлениям, являются так называемые графы, изучаемые в теории графов.

Теория графов – это раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы.

Основные понятия теории графов

Граф – это система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа – см. рисунок 1). Кружки называются вершинами графа, линии со стрелками – дугами, без стрелок – рёбрами.

Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется неориентированным; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется ориентированным.

Теория графов может рассматриваться как раздел дискретной математики (точнее – теории множеств), и тогда определение графа таково:

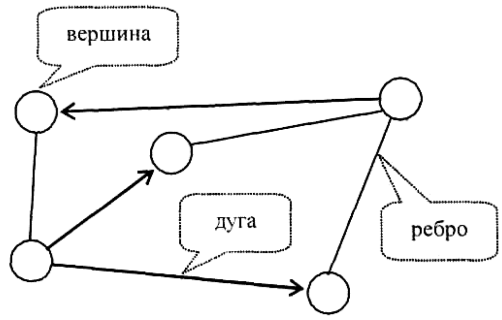


Рис. 1. Пример графа

Граф – это конечное множество X, состоящее из n элементов $(X = \{1, 2, ...n\})$ называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения $X \times X$, называемое множеством дуг.

Ориентированным графом G (орграфом) называется совокупность (X, V).

Неориентированным графом называется совокупность множеств X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X.

Дугу между вершинами i и j, $i, j \in X$, будем обозначать (i, j). Число дуг графа будем обозначать $m(V = (v_1, v_2, ...v_m))$.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми рёбрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если в графе удалить часть рёбер (дуг), то получим частичный граф.

Две вершины называются смежными, если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются граничными вершинами соответствующего ребра (дуги), а это ребро (дуга) - инцидентным соответствующим вершинам.

Граф называется полным, если каждые две вершины его соединены одним и только одним ребром.

Граф, для которого из $(i, j) \in V$ следует $(j, i) \in V$ называется симметричным. Если из $(i, j) \in V$ следует $(j, i) \notin V$, то соответствующий граф называется антисимметричным.

Язык графов оказывается удобным для описания многих физических, технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

Вершины в графе могут отличаться друг от друга тем, скольким рёбрам они принадлежат.

Степень вершины называется число рёбер графа, которым принадлежит эта вершина. Степень графа ещё называют его валентностью и обозначают $d(v)$. Вершина графа, для которой $d(v) = 0$, является изолированной, для которой $d(v) = 1$– висячей.

Вершина называется нечётной, если $d(v)$ – нечётное число. Вершина называется чётной, если $d(v)$ – чётное число. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.

В графе $G(V, E)$ сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа. Число нечётных вершин любого графа чётно. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geq 2$, всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.

Если в графе с n вершинами $(n \geq 2)$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n - 1$.

1. *Маршруты, цепи, циклы*

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, в которой любые два соседних элемента инцидентны: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k$.

Если $v_0 = v_k$, то маршрут замкнут, в противном случае открыт.

Путём называется последовательность дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги является началом другой дуги.

Простой путь – путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды.

Контур – путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной вершиной.

Длиной пути (контура) называется число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы).

Цепью называется множество рёбер (в неориентированном графе), которые можно расположить так, что конец (в этом расположении) одного ребра является началом другого. Другое определение: цепь – последовательность смежных вершин. Замкнутая цепь называется циклом. Можно определить простые и элементарные цепи.

Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа называется гамильтоновой цепью.

Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все рёбра (дуги) графа называется эйлеровой цепью.

Если любые две вершины графа можно соединить цепью, то граф называется связным. Если граф не является связным, то его можно разбить на связные подграфы, называемые компонентами.

Связностью графа называется минимальное число рёбер, после удаления которых граф становится несвязным.

2. Ориентированные графы

Если элементы множества E графа $G(V,E)$ – упорядоченные пары, то граф называется ориентированным или орграфом.

Ребро e графа G называется ориентированным, если одну вершину считают началом ребра, а другую – концом, на рисунке его изображают стрелкой между вершинами. Таким образом, граф, все рёбра которого ориентированы, называется ориентированным графом.

Одна и та же вершина ориентированного графа может служить началом для одних рёбер и концом для других, поэтому различают две степени вершины: степень выхода и степень входа.

Степенью выхода вершины орграфа называется число выходящих из вершины рёбер.

Степенью входа вершины орграфа называется число входящих в вершину рёбер.

В орграфах в зависимости от сочетаний степеней входа и выхода для данной вершины рассматривается три случая.

Изолированной вершиной называется вершина, у которой и степень входа и степень выхода равна 0.

Источником называется вершина, степень выхода которой положительна, а степень входа равна 0.

Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна 0.

Путём в ориентированном графе называется последовательность ориентированных рёбер, т. е. для орграфов цепь называется путём.

Простым путём в ориентированном графе называется путь, в котором ни одна вершина не содержится более одного раза.

Замкнутый путь в ориентированном графе называется ориентированным циклом или контуром.

Длиной пути называется число рёбер в этом пути.

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром.

Всякий полный ориентированный граф с n вершинами имеет простой ориентированный путь, проходящий через все вершины графа.

Петлёй называется ребро, у которого начальная и конечная вершины совпадают. Петля обычно считается неориентированной.

Мультиграфом называется граф, в котором пара вершин соединяется несколькими различными рёбрами. Для ориентированного мультиграфа вершины v_i и v_j могут соединяться несколькими рёбрами в каждом из направлений.

3. Изоморфизм графов

Два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если между множествами их вершин существует биективное (взаимнооднозначное) соответствие, такое, что вершины соединены рёбрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если рёбра ориентированы, то их направление в изоморфных графах должно совпадать. Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности, так как обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности. Для того чтобы граф G_1 был изоморфен графу G_2, необходимо и достаточно существования такой подстановки, которая бы установила взаимнооднозначное соответствие между вершинами графа, а также между их рёбрами.

При замене графа любым ему изоморфным все свойства графа сохраняются. Строго говоря, графы отличающиеся только нумерацией вершин, являются изоморфными.

Алгоритм распознания изоморфизма двух графов $G_1(X;E)$ и $G_1(Y;E)$.

1. Подсчитаем число вершин каждого графа (число вершин должно совпадать, в противном случае графы неизоморфные).

2. Выписываем все элементы обоих графов в естественной упорядоченности и определяем пары $(x_i;x_j)$ и $(y_i;y_j)$ для каждого элемента, где x_i, y_i – число исходов для каждой вершины графов G_1 и G_2, а x_j, y_j – число заходов для соответствующих графов.

3. Для каждого элемента x графа G_1 ищем такой элемент y графа G_2, что выполняется условие: число исходов x совпадает с числом исходов y, и число заходов x совпадает с числом заходов y. Найденные элементы x и y соединяем ребром, т. е. строим граф соответствия (если соответствия нет, то графы не изоморфны).

4. Выписываем подстановку, которая переводит граф G_1 в граф G_1.

4. Плоские графы

Граф $G(V,E)$ называется плоским, если на плоскости его можно изобразить так, что все пересечения его рёбер являются вершинами графа $G(V,E)$.

В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани.

Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

5. Операции над графами

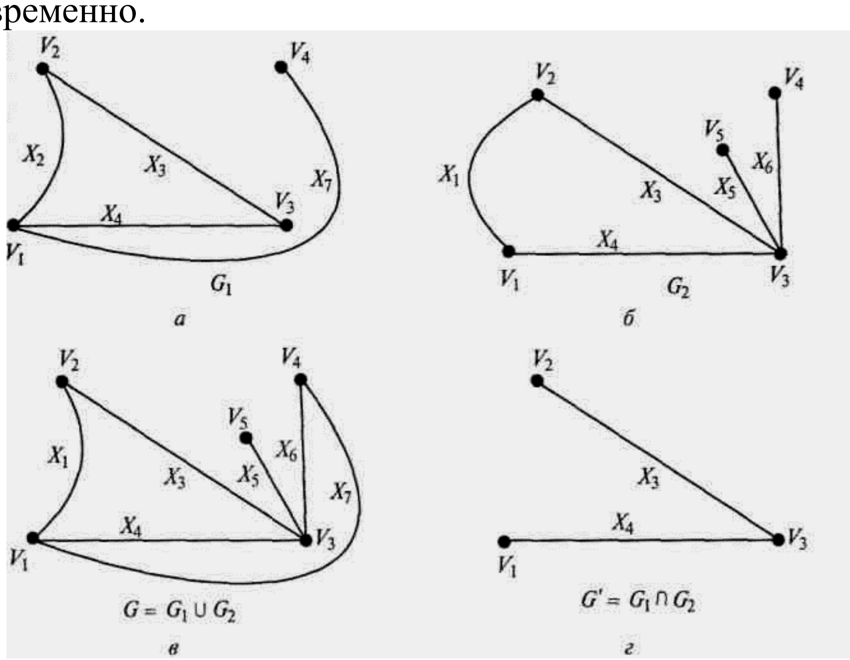
Рассмотрим графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$.

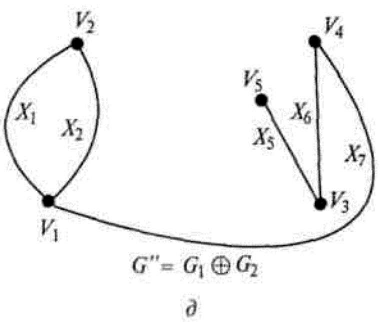
а) <u>Дополнением</u> графа $G_1(V_1, E_1)$ называется граф $\overline{G_1}(V_1, \overline{E_1})$, множеством вершин которого является множество V_1, а множеством его рёбер является множество $\overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_2 : e \notin E_1\}$.

б) <u>Объединением</u> графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cup E_2$.

в) <u>Пересечением</u> графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cap E_2$.

г) <u>Суммой по модулю два</u> графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер – множество $E_1 \oplus E_2$. Т. е. этот граф не имеет изолированных вершин и состоит только из рёбер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором графе, но не в обоих графах одновременно.





6. Способы задания графов

Существуют три эквивалентных способа задания графов: аналитический, геометрический и матричный. Рассмотрим каждый из них.

Аналитический способ задания графов

Граф $G(V,E)$ задан, если задано множество элементов V и отображение E множеств V в V. Отображение E может быть как однозначным, так и многозначным.

Пусть дано множество $V=\{v_1,v_2,...v_n\}$, которое имеет мощность $|V|=n.$

Для того чтобы задать отображение E на V , необходимо каждому элементу $v_i \in V$ поставить в соответствие некоторое подмножество множества V, которому соответствует отображение E. Это подмножество обозначают через E_{v_i}. Поэтому $E_{v_i} \subset V$. Совокупность двух объектов: множества V и отображение E на V задаёт некоторый граф.

Другой формой аналитического способа задания является задание графа как совокупности множества элементов V и подмножества множества упорядоченных пар $\langle v_i, v_j \rangle \in V \times V$.

Геометрический способ задания графов

Множество элементов V графа G изображают кружками, это множество вершин. Каждую вершину $v_i \in V$ соединяют линиями с теми вершинами $v_i \in V$, для которых выполняется условие $v_i \in E_{v_i}$. Множество линий, которое соответствует множеству упорядоченных пар $\langle v_i, v_j \rangle$, есть множество рёбер.

Матричный способ задания графов

Квадратная матрица $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$, элементами которой являются нули и единицы, а также некоторое число m, называется матрицей смежности графа $G(V,E)$ тогда и только тогда, когда её элементы образуются по следующему правилу: элемент a_{ij}, стоящий на пересечении $v_i -$ й строки и $v_j -$го столбца, равен единице, если имеется ребро, идущее из вершины v_i в вершину v_j, и a_{ij} равен нулю в противном случае. Элемент a_{ij} равен единице, если при вершине v_i имеется петля, и равен нулю в противном случае. Элемент a_{ij} равен некоторому числу m, где m – число рёбер графа, идущее из вершины v_i в вершину v_j.

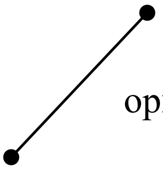
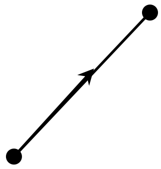
Таким образом, если граф $G(V,E)$ задан одним из указанных способов: аналитическим, геометрическим или матричным, всегда можно перейти к любому другому способу задания. Наиболее часто для задания графа используется аналитический и матричный способы, а геометрический способ служит для иллюстрации полученных результатов.

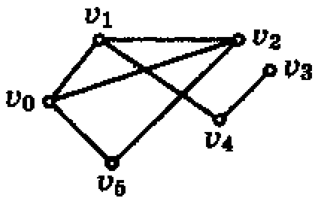
Инструкция к практической работе

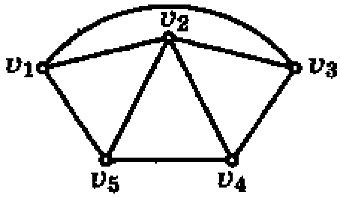
Задание 1. Изобразите графически:

1. Неориентированное и ориентированное ребро;
2. Неориентированный граф G(*V*,*E*), заданный множеством $V=\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $E(v0)=\{v_1,v_2\}=\{v_0,v_2,v_4\}$; $E(v_1)=\{v_0,v_2,v_4\}$; $E(v_2)=\{v_0,v_1,v_5\}$; $E(v_3)=\{v_4\}$; $E(v_5)=\{v_2\}$;
3. Плоский граф;
4. Полный неориентированный граф на трех, четырех и пяти вершинах;
5. Неполный ориентированный граф на пяти вершинах;
6. Петлю графа;
7. Неориентированный и ориентированный мультиграф.

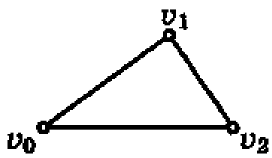
Решение:

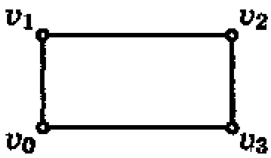
1) Неориентированное ребро  ориентированное ребро 

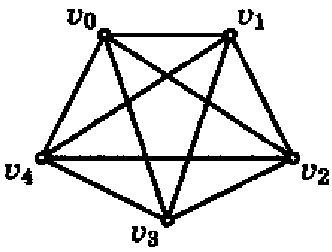
2) 

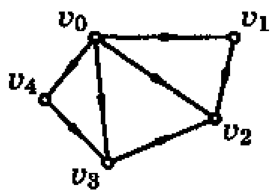
3) 

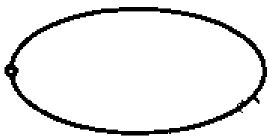
Плоский граф

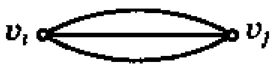
4) 



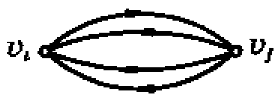


5) 

6) 

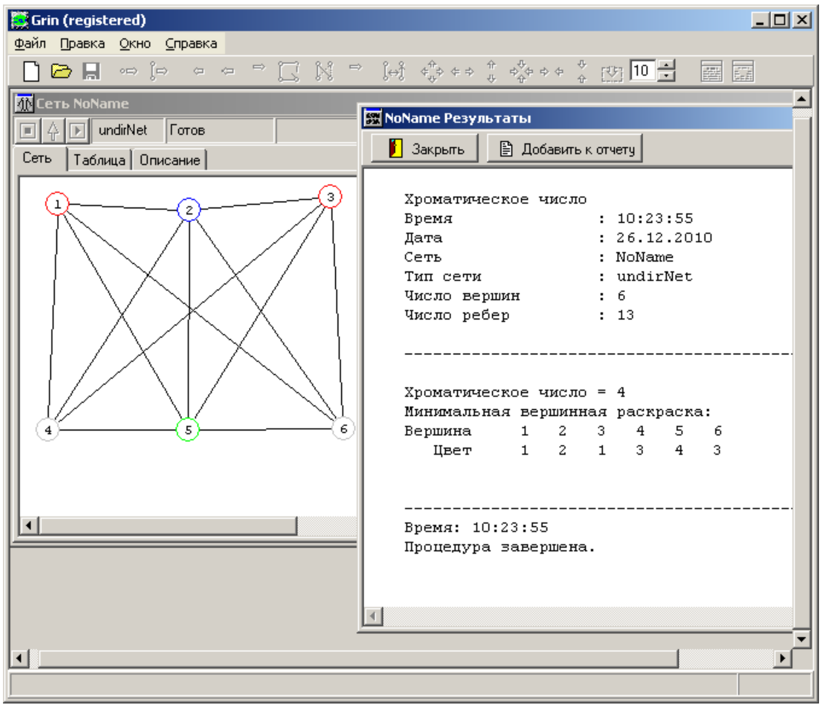
7) 

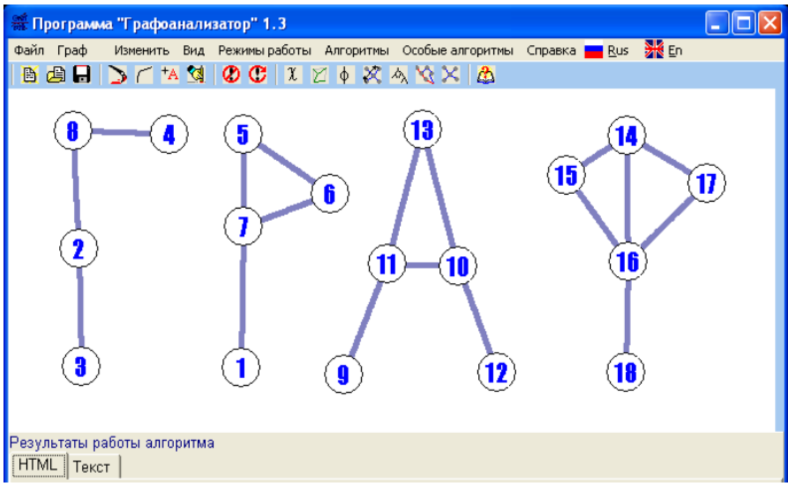
Мультиграф

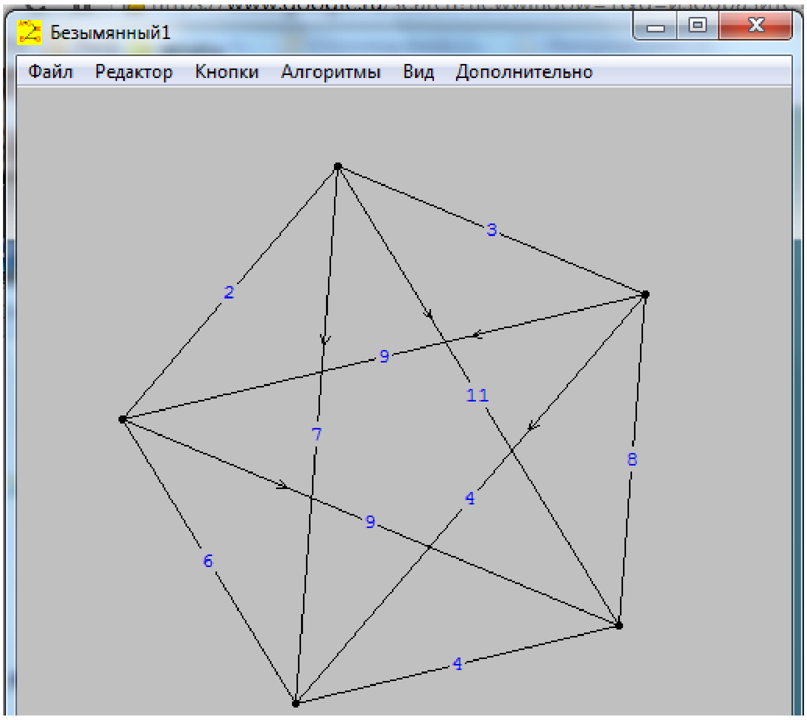


Ориентированный мультиграф

Задание 2. Изобразить графы в программах:
grin_rus, Grafoanalizator1.3.3 rus, windisc ru.


Grin (registered)
Файл Правка Окно Справка
Сеть NoName
undirNet Готов
Сеть Таблица Описание
NoName Результаты
Закрыть Добавить к отчету
Хроматическое число
Время : 10:23:55
Дата : 26.12.2010
Сеть : NoName
Тип сети : undirNet
Число вершин : 6
Число ребер : 13
Хроматическое число = 4
Минимальная вершинная раскраска:
Вершина 1 2 3 4 5 6
Цвет 1 2 1 3 4 3
Время: 10:23:55
Процедура завершена.


Программа "Графоанализатор" 1.3
Файл Граф Изменить Вид Режимы работы Алгоритмы Особые алгоритмы Справка Rus En
Результаты работы алгоритма
HTML Текст


Безымянный1
Файл Редактор Кнопки Алгоритмы Вид Дополнительно

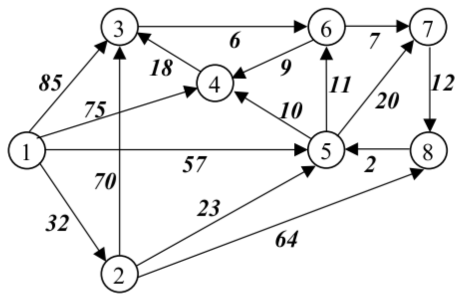
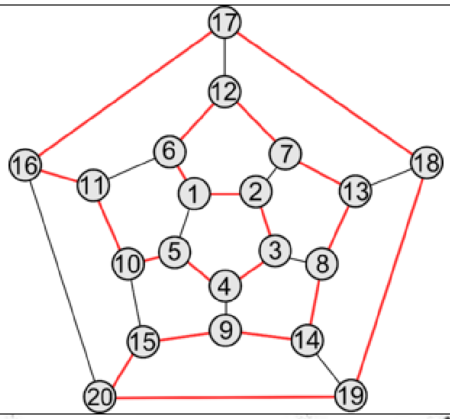
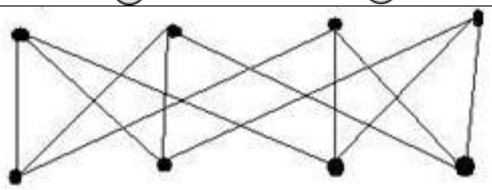
Задание:

Вариант № 1

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Изобразите графически:
***G*(*V*,*E*)** - орграф.
***V*={1,2,3,4}, *E*={(1, 2), (4, 3), (3, 4), (3, 1), (4, 1)}.**

Задание 2. Изобразите графы в соответствующих программах. Полученные графы сохранить в свои папки.

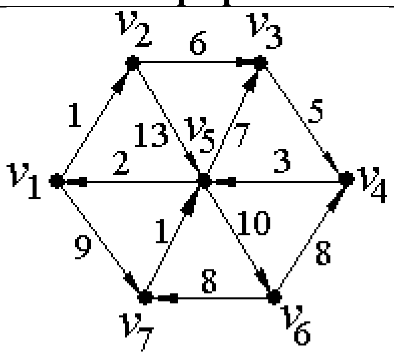
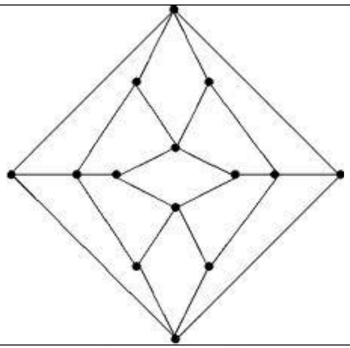
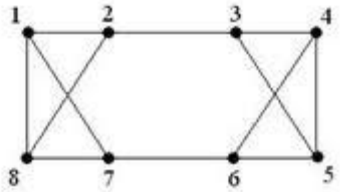
Граф	Программа
	Grafoanalizator1.3.3 rus
	grin_rus
	windisc ru

Вариант № 2

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Изобразите графически:
***G*(*V*,*E*)** - орграф.
***V*={1,2,3,4,5}, *E*={(1, 2), (4, 3), (3, 5), (5, 1), (4, 1)}.**

Задание 2. Изобразите графы в соответствующих программах. Полученные графы сохранить в свои папки.

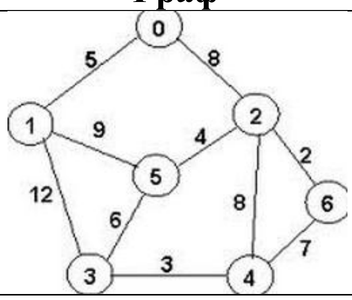
Граф	Программа
	Grafoanalizator1.3.3 rus
	grin_rus
	windisc ru

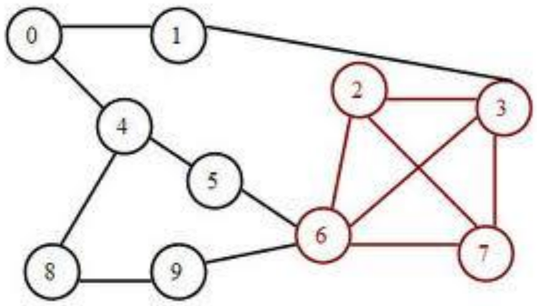
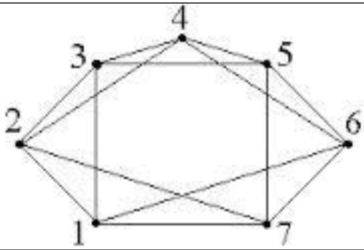
Вариант № 3

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Изобразите графически:
***G*(*V*,*E*)** - орграф.
***V*={1,2,3,4,5}, *E*={(1, 3), (2, 3), (1, 5), (2, 4), (1, 2)}.**

Задание 2. Изобразите графы в соответствующих программах. Полученные графы сохранить в свои папки.

Граф	Программа
	Grafoanalizator1.3.3 rus

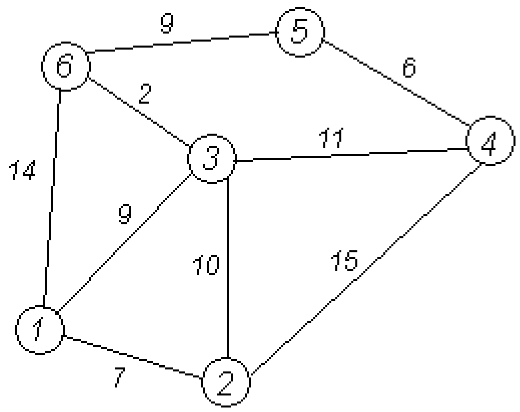
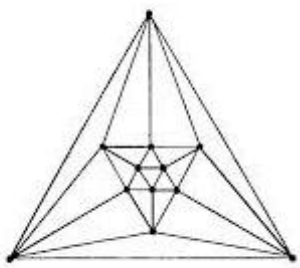
	grin_rus
	windisc ru

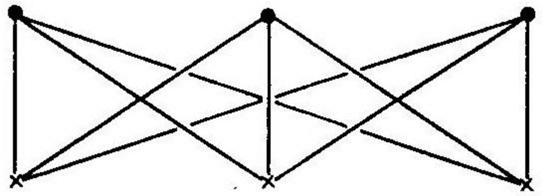
Вариант № 4

Задание 1. Выполните задание по образцу.

Изобразите графически:
***G*(*V*,*E*)** - орграф.
***V*={1,2,3,4,5,6}, *E*={(1, 6), (4, 5), (1, 2), (2, 3), (3, 6)}.**

Задание 2. Изобразите графы в соответствующих программах. Полученные графы сохранить в свои папки.

Граф	Программа
	Grafoanalizator1.3.3 rus
	grin_rus

	windisc ru

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Задачи.
4. Материальное обеспечение.
5. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1.Что называется графом? Ориентированным графом? Приведите примеры.
2.Что такое степень вершины?
3.Перечислите основные понятия, связанные с неориентированными графами.
4.Перечислите основные понятия, связанные с орграфами.
5.В чем состоит аналитический способ задания графа?
6.В чем состоит геометрический способ задания графа?
7.В чем состоит матричный способ задания графа?
8.Что называется маршрутом, циклом и цепью графа?
9.Сформулируйте понятие связности графа. Какой граф называют связным?
10.Какие два графа называются изоморфными?
11.Сформулируйте алгоритм изоморфизма двух графов.
12.Перечислите операции над графами.