4. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях

Актуальность темы

Таким же важным, как и понятие производной в математическом анализе, является и понятие дифференциала функции. В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путем измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближенные методы.

Теоретической основой одного из простейших приёмов приближенных вычислений является понятие дифференциала.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- находить дифференциал функции;
- применять формулу приближенных вычислений значения функции;
- находить частные и полный дифференциалы функции многих переменных

Обучающийся должен знать:

- понятие дифференциала функции;
- понятие полного и частного дифференциала;
- формулу приближенных вычислений значений функции в точке с помощью дифференциала.

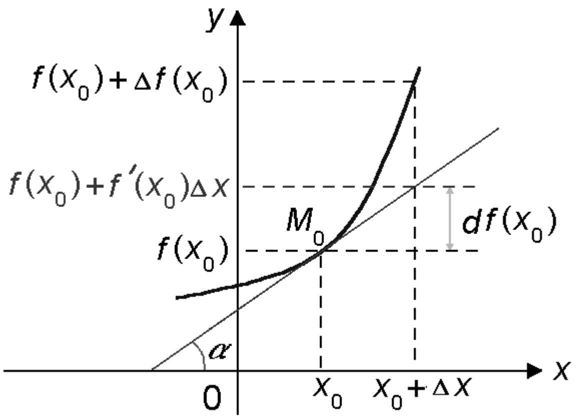
Ключевые понятия и формулы

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение аргумента. Обозначается dy.

$\boldsymbol{dy = y'\Delta x = y'dx}$ – дифференциал функции $y = f(x)$ по переменной x **(4.1)**

$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy \approx \Delta y}$ **(4.2)**

Геометрическая интерпретация дифференциала функции



Частный дифференциал по переменной *x* **функции** $u = f(x;\ y;z)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной *x* в предположении, что *y* и *z* – постоянные величины.

Обозначения частного дифференциала по *x*: $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, или $\frac{\partial f}{\partial x}dx$

$\boldsymbol{d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx}$ – частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x, **(4.3)**

$\boldsymbol{d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной y, **(4.4)**

$\boldsymbol{d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной z. **(4.5)**

$\boldsymbol{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz}$ – полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ **(4.6)**

Пример 1.

Вычислите приближенно приращение функции $y = \frac{x+1}{x^2}$, если аргумент изменился с $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$

Решение: приращение функции приближенно равно дифференциалу функции:

$$\Delta f(x) \approx\ dy = y'\Delta x = \left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)' = \frac{(x^2+1)'x^3-(x^2+1)(x^3)'}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{2x\cdot x^3-3x^2(x^2+1)}{x^6}\Delta x = \frac{2x^4-3x^4-3x^2}{x^6}\Delta x = \frac{-x^4-3x^2}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{x^2(-x^2-3)}{x^6}\Delta x = \frac{-x^2-3}{x^4}\Delta x$$

Вычислим значение дифференциала при $x_1 = 1$ и $\Delta x = 1{,}003 - 1 = 0{,}003$

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx dy|_{\substack{x_1=1 \\ \Delta x=0{,}003}} = \frac{-1^2-3}{1^4}\cdot 0{,}028 = -4\cdot 0{,}028 = -0{,}112$$

Ответ: $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx -0{,}112$, т.е. значение функции уменьшилось на 0,112 при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$.

Пример 2.

Вычислите полный дифференциал функции $u = x^2 \cdot lny$.

Решение:

Полный дифференциал записывается в виде $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Найдем частные дифференциалы:

Дифференциал функции u по переменной x: т.е. y принимается за постоянную величину, а, следовательно, и lny – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx = (x^2\cdot lny)'_x dx = lny\cdot(x^2)'_x dx = 2x\ lny\ dx$$

Дифференциал функции u по переменной y: т.е. x принимается за постоянную величину, а, следовательно, и x^2 – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy = (x^2\cdot lny)'_y\ dy = x^2(lny)'_y\ dy = x^2\cdot\frac{1}{x}dy = x\ dy$$

Тогда полный дифференциал $du = 2x\ lny\ dx + x\ dy$

Ответ: $du = 2x\ lny\ dx + x\ dy$

Приложение дифференциала функции
к приближенным вычислениям значения функции

Формула приближенного вычисления значения функции

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})\cdot\Delta\boldsymbol{x} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Алгоритм приближенного вычисления значения функции в точке x:

1. Представить x в виде суммы x_0 и Δx, $x = x_0 + \Delta x$, x_0 – должно быть как можно ближе к заданному значению x и значение функции в точке x_0 вычисляется точно.
2. Вычислить $f(x_0)$
3. Найти производную заданной функции в точке x_0.
4. Полученные значения подставить в формулу приближенных вычислений.

Из основной формулы приближенных вычислений выводятся следующие формулы:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n}\Delta x \tag{4.8}$$

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x \quad \text{при } x \neq 0 \tag{4.9}$$

$$(1+\Delta x)^k \approx 1 + k\Delta x, \qquad k \in Z \tag{4.10}$$

$$(x_0+\Delta x)^k \approx {x_0}^k + k{x_0}^{k-1}\Delta x \tag{4.11}$$

Пример 3.

Вычислите приближенно значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$

Решение: воспользуемся алгоритмом приближенного вычисления значения функции:

1) представим x в виде суммы $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $x = 2{,}025 = 2 + 0{,}025$, где $x_0 = 2, \Delta x = 0{,}025$;

2) вычислим $f(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2^5 - 2^3 - 1 = 64 - 8 - 1 = 55$

3) найдем производную заданной функции: $y' = (2x^5 - x^3 - 1)' = 10x^4 - 3x^2$ и вычислим ее значение в точке $x_0 = 2$: $y'(2) = 10 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 = 160 - 12 = 148$

4) подставим значения в формулу приближенных вычислений 4.7.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(2{,}025) = f(2 + 0{,}025) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}025 = 55 + 148 \cdot 0{,}025 = 55 + 3{,}7 = 58{,}7$$

Ответ: значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$ приближенно равно 58,7

Под **абсолютной погрешностью** измерения понимают разность между полученным в ходе измерения и истинным значением физической величины:

$$\Delta = |x_{изм.} - x_{ист.}| \qquad (4.12)$$

Относительная погрешность представляет собой отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\Delta}{x_{ист.}} \mathbf{100}\% \qquad (4.13)$$

Результат измерения величины принято записывать в виде:

$$x_{изм.} \pm \Delta, \qquad \boldsymbol{\delta} = \cdots \%.$$

При записи абсолютной погрешности ее величину округляют до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. При записи измеренного значения величины последней должна указываться цифра того десятичного разряда, который использован при указании погрешности.

Пример 4. В отделении стационара 183 пациента. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешности, если округлить это число до 180.

Решение:

Абсолютная погрешность: $\Delta = 183 - 180 = 3$.

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{ист}} 100\% = \frac{3}{183} \cdot 100\% \approx 1{,}6\%$$

Ответ: $\Delta = 3$, $\delta \approx 1{,}6\%$

Проверь себя

1. Выберите верные утверждения:
   1) дифференциал аргумента и приращение аргумента равны,
   2) дифференциал аргумента и приращение аргумента приближенно равны,
   3) дифференциал функции и приращение функции равны,
   4) дифференциал функции и приращение функции приближенно равны.

2. Задана функция $y = x^2$ и начальное значение аргумента $x_0 = 3$. Аргументу задано приращение $\Delta x = 0{,}005$. Выберите действия и установите их последовательность при вычислении приближенного приращения функции:
   1. $y(3) = 3^2 = 9$
   2. $y' = 2x$
   3. $\Delta y \approx dy = 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}03$
   4. $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$
3. Установите соответствие между функцией и записью вычисления ее значения в точке 1,996

1)	$y = x^3$	а)	$\dfrac{1}{1{,}996^3}$
2)	$y = x^{\frac{1}{3}}$	б)	$1{,}996^3$
3)	$y = x^{-3}$	в)	$\sqrt[3]{1{,}996}$

4. Необходимо вычислить при помощи дифференциала приближенное значение функции $y = x^3 + 2x$ при $x = 4{,}025$. Следуя формуле (4.7) заполните пропуски и вычислите приближенно значение функции:
   1. $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,$ $x_0 = \boxed{}$ $\Delta x = \boxed{}$
   2. $y(x_0) = \boxed{}$
   3. $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{}$
   4. $y'(x_0) = \boxed{}$
   5. $y(4{,}025) \approx \boxed{} + \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$
5. Частный дифференциал $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = x^6 y + 2x$ имеет вид:
   1. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$
   2. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 y + 2)dx$
   3. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (x^6 + 2x)dx$
   4. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$

Эталон ответов:

1. 1,4
2. 2,4,3
3. 1-б, 2-в, 3-а
4.

   1) $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,\qquad x_0 = \boxed{4}\quad \Delta x = \boxed{0{,}025}$

   2) $y(x_0) = \boxed{4^3 + 8 = 72}$

   3) $y' = (x^3 + 2x)' = \boxed{3x^2 + 2}$

   4) $y'(x_0) = \boxed{3 \cdot 4^2 + 2 = 50}$

   5) $y(4{,}025) \approx \boxed{72} + \boxed{50} \cdot \boxed{0{,}025} = \boxed{73{,}25}$
5. 2.

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Понятия приращение функции, приращение аргумента.
2. Определение дифференциала функции.
3. Формула приближенных вычислений значения функции.
4. Выполните задания:

   1) Вычислите приращение функции y=f(x), если задано начальное значение x_0 и аргумент изменился на Δx.

   а). $y = \dfrac{x\sqrt{x} - 5x^3 + x}{x}, \quad x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}02$

   б). $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}, \quad x_0 = 2,\ \Delta x = 0{,}009$

   в). $y = x^3 \cdot (1 - \cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2},\ \Delta x = 0{,}04$

   Ответы:

   а) $\Delta y \approx -0{,}019$;

   б) $\Delta y \approx 0{,}022$;

   в) $\Delta y \approx 0{,}24\pi^2$

Вычислите приближенно значение функции:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, при 1,06

Ответ: $f(1{,}06) \approx 1{,}03$

2) $f(x) = x^7 + 5x^4 + x^3 - 3x + 1$, при $x = 1{,}002$

Ответ: $f(1{,}002) \approx 5{,}054$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = -7{,}75$

Ответ: $f(-7{,}75) \approx 5{,}054$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»

9-10 баллов «4»

6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

4.1. Насколько изменится значение функции $y = 1 - x + x^2$ при изменении аргумента от 4 до 4,002?

4.2. Насколько изменится значение функции $y = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ при изменении аргумента от 3 до 3,001?

4.3. Дана функция $y = x^4 + x^3 - 2x$, найти y (1,004).

4.4. Дана функция $y = x^3 + x^2 - x$, найти y (0,998).

4.5. Используя общую формулу приближенных вычислений, вывести формулы для функций:

1) $ctg\,(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

2) $arctg\,(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

3) $ln(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

4.6. Найдите приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2, \Delta x = 0{,}001$. Какую погрешность допустим, если вычислим дифференциал вместо приращения?

4.7. Какова абсолютная погрешность округления:

а) с недостатком числа 8,3 до ближайшего целого числа;

б) с недостатком числа 9,6 до ближайшего целого числа;

в) с избытком числа 2,8 до ближайшего целого числа;

г) с избытком числа 7,1 до ближайшего целого числа.

д) с избытком числа 2,3 до ближайшего целого числа

4.8. С помощью формулы относительной погрешности выясните какое из двух измерений более точное: $(6{,}00 \pm 0{,}01)$м или $(345{,}0 \pm 0{,}5)$м

4.9. Расстояние между городами, измеренное по карте, равно (24,6±0,2) см. Определить фактическое расстояние между ними и определить абсолютную погрешность, если масштаб карты 1:2 500 000

4.10. Вычислите абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приближенного числа $\pi \approx 3{,}1416$ более грубым приближением $\pi \approx 3{,}14$

Вычислите приближенное значение приращения функции с помощью дифференциала:

4.11. $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0{,}02$

4.12. $y = -x^3 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 4$ при $\Delta x = 0{,}005$

4.13. $y = 3x^2 + 7x - 2$ в точке $x_0 = 8$ при $\Delta x = 0{,}03$

4.14. $y = \frac{1}{x^3} + 5$ в точке $x_0 = -2$ при $\Delta x = 0{,}016$

4.15. $y = 2x^2 - 6x + 3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1{,}001$.

4.16. $y = -5x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к значению $x_2 = 2{,}003$

Результат вычислений найден с помощью калькулятора. Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений, определите абсолютную погрешность вычислений:

4.17. $\sqrt{0{,}991} \approx 0{,}99489$

4.18. $\sqrt{1{,}008} \approx 1{,}00399$

4.19. $1{,}0004^{50} \approx 1{,}0202$

4.20. $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}996996$

4.21. $1{,}0003^{20} \approx 1{,}00602$

II уровень

Найдите дифференциал функции:

4.22. $y = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{3}{x^5}$

4.23. $y = 5lnx + log_7 2x$

4.24. $y = 2^x + \sqrt[3]{x}$

4.25. $y = tgx^3 - 5sin2x$

4.26. $y = sin\,3x \cdot cos4x$

4.27. $y = cos(x^3)$

4.28. $y = (cosx)^3$

4.29. $y = sin^2 3x$

4.30. Вычислите дифференциал функции $y = \frac{sinx}{x+2}$ при заданном значении $x_0 = 0$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}002$:

4.31. Вычислите дифференциал функции $y = \frac{3x^2-2x-4}{2x}$ при заданном значении $x_0 = -1$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}04$

4.32. Вычислите дифференциал функции $y = x^2 cosx$ при заданном значении $x_0 = \pi$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}01$

4.33. Вычислите дифференциал функции $y = (5x-1)^4$ при заданном значении $x_0 = 1$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}02$

Вычислите приближенно значение функции:

4.34. $y = \sqrt{x+1}$ *при* $x = 2{,}98$

4.35. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ при $x = 1{,}997$

4.36. $y = \dfrac{2x^3 - 4}{4x + 2}$ при $x = 1{,}02$

Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений:

4.37. $\sqrt{24{,}5}$

4.38. $\sqrt[4]{86}$

4.39. $\sqrt[3]{125}$

4.40. $\sqrt[5]{32{,}26}$

4.41. $(2{,}989)^{50}$

4.42. $\sqrt[4]{82{,}5}$

4.43. $\sqrt{26}$

4.44. $\sqrt{15{,}84}$

III уровень

Вычислите приближенно значение функции:

4.45. $\sqrt[5]{x + 1}$ при $\mathrm{x} = 30{,}68$

4.46. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ при $\mathrm{x} = 1{,}004$

4.47. $\mathrm{y} = \sqrt{3\mathrm{x}^2 - 2}$ при $\mathrm{x} = 3{,}005$

Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений:

4.48. $\dfrac{1}{0{,}998^{10}}$

4.49. $sin31°$

4.50. $tg32°$

4.51. $cos61°$

4.52. $tg43°$

4.53. $ln1{,}07$

4.54. $ctg43°$

4.55. $tg46°$

Найдите частные производные и полный дифференциал функции:

4.56. $u = 2xy + 3y^2x^3$

4.57. $u = x^2 + 5y$

4.58. $u = 4\sin\,(5x^2 - y)$

4.59. $u = ye^x$

4.60. $u = e^{xy}$

4.61. $u = x^2 + xy + z^2$

4.62. $u = \dfrac{x + y^2}{z}$

4.63. Рост числа клеток популяции описывается уравнением: $N = \frac{5N_0}{(5-N_0)e^{-kt}+N_0}$. Получите формулу для скорости роста численности популяции.

4.64. Укорочение мышцы при одиночном раздражении можно описать уравнением Релея: $y = bte^{-\frac{kt^2}{2}}$, где t – время, b и k – положительные постоянные величины. Найдите моменты времени, при которых скорость укорочения мышцы будет равна 0. Чему будет равно ускорение?