ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Методические указания

к решению задач по теме «Методы интегрирования»

Составители: Н.И.Васильева, Е.Ю.Непомнящая.

Рецензент: Е.А. Зарембская

Данные методические указания предназначены для самостоятельного изучения раздела высшей математики "Неопределенный интеграл" и содержат теоретические сведения и примеры решения задач по технике интегрирования тригонометрических и иррациональных функций.

Раздел 1. Интегрирование иррациональных функций.

§ 1.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

При интегрировании выражений вида

$$R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

следует применить замену $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Если в подынтегральной функции содержится несколько радикалов от одного и того же дробно-линейного выражения, но разных степеней, то за k следует принять наименьшее общее кратное показателей радикалов.

Выполнение действий с использованием указанной замены рассмотрим на примерах.

Пример 1.1.

Вычислить $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение.

Сделаем замену переменной $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Пример 1.2. Найти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

Решение.

Сделаем замену переменной $\frac{1-x}{1+x} = t^2$.

Найдем x:

$$1-x = t^2 + xt^2,\ x\left(t^2+1\right) = 1-t^2,\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Вычислим dx:

$$dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1-t^2)^2}dt = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Подставим полученное значение в исходный интеграл:

$$\int t \cdot \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = \int \frac{-4t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)} dt = \int \frac{4t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-1\right)}.$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = -\int t \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} dt =$$

$$= -\int \frac{4t^2 dt}{(1+t^2)(1-t^2)} = \int \frac{4t^2 dt}{(1+t^2)(t^2-1)}.$$

Мы получили интеграл от рациональной дроби, которую надо разложить на сумму простейших дробей. Проделаем это.

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)(t^2-1)} = \frac{4t^2}{(1+t^2)(t-1)(t+1} =$$

$$= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}.$$

$$4t^2 = At\left(t^2-1\right) + B\left(t^2-1\right) + C(t+1)\left(1+t^2\right) + D\left(1+t^2\right)(t-1).$$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & 0 = A + C + D, \\ t^2 & 4 = B + C - D, \\ t^1 & 0 = -A + C + D, \\ t^0 & 0 = -B + C - D. \end{array}$$

Из 1-го и 3-го уравнений находим $A = 0$.

Из 2-го и 4-го уравнений $4 = 2B$, то есть $B = 2$.

А теперь рассмотрим 1-е и 2-е уравнения:

$$\begin{cases} C + D = 0, \\ C - D = 2. \end{cases}$$

Откуда $C = 1$, $D = -1$.

Итак,

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)(t^2-1)} = \frac{2}{t^2+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

Интегрируя сумму простейших дробей, получаем

$$\int \frac{2}{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = 2 \operatorname{arctg} t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\int \frac{1-x}{1+x}\frac{dx}{x} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}\right| + C.$$

Пример решен. Все выкладки обоснованы и верны. Но! Можно было упростить себе работу. Вернемся к этапу разложения дроби на простейшие. Дробь содержит только t^2. Обозначим $t^2 = z$. Раскладываем дробь на простейшие

$$\frac{4z}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1},$$

$$4z = A(z-1) + B(z+1),$$

$$\begin{cases} 4 = A + B, \\ 0 = -A + B, \end{cases} \quad B = 2,\ A = 2,$$

$$\frac{4z}{(z+1)(z-1)} = \frac{2}{z+1} + \frac{2}{z-1}.$$

Возвращаясь к переменной t, получим

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{2}{t^2+1} + \frac{2}{t^2-1}.$$

Интегралы от дробей в правой части – табличные. Так иногда можно упростить вычисления.

Пример 1.3.

Вычислить $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение.

Так как в знаменателе подынтегральной функции два радикала разных степеней, то сделаем замену $x+1=t^6$.

Проделаем все необходимые выкладки: $x = t^6 - 1,\ dx = 6t^5 dt.$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{(t^6-1)6t^5dt}{t^3+t^2} =$$

$$= 6\int \frac{(t^2-1)(t^4+t^2+1)t^5dt}{t^2(t+1)} =$$

$$= 6\int (t-1)\left(t^4+t^2+1\right)t^3dt = 6\int \left(t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} -$$

$$-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Пример 1.4.

Вычислить $\int x\sqrt[3]{1+x}dx.$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$1+x=t^3,\ \ x=t^3-1,\ dx=3t^2dt,$$

$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx = \int (t^3-1)\,t\cdot 3t^2dt = 3\int (t^6-t^3)\,dt.$$

Находя табличные интегралы, получим

$$3\int (t^6-t^3)dt = \frac{3t^7}{7}-\frac{3t^4}{4}+C.$$

Вернемся к переменной x:

$$\int x\sqrt[3]{1+x}dx = \tfrac{3}{7}(1+x)^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения.

№	Задание	Ответ
1	$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$	$6\sqrt[6]{x} - 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C.$
2	$\int x\sqrt{3-x}\,dx.$	$\frac{2}{5}\left(x^2 - x - 6\right)\sqrt{3-x} + C.$
3	$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx\,.$	$-2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left(\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right) + C.$

§ 1.2. Интегрирование функций, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Рассмотрим несколько примеров интегралов от функций, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Такие интегралы называют интегралами от квадратичных иррациональностей.

Пример 1.5.

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Решение.

Выделим полный квадрат из подкоренного выражения.

$$4x^2+4x+5 = 4x^2+4x+1+4 = (2x+1)^2+1\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+1}}\,.$$

Теперь используем табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}} = \ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+2)^2+1}\right| + C\,.$$

Но $(2x+1)^2+1 = 4x^2+4x+1$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}} = \ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1}\right| + C\,.$$

Пример 1.6.

Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение.

Выделяем полный квадрат из подкоренного выражения.

$$8-2x-x^2=-\left(x^2+2x-8\right)=-(x^2+2x+1-9)=$$
$$=-\left[(x+1)^2-9\right]=9-(x+1)^2.$$

Теперь сделаем замену переменной $x+1=t$. $dx=dt$.

$$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\int \frac{t-1-3}{\sqrt{9-t^2}}dt=\int \frac{t-4}{\sqrt{9-t^2}}dt=$$

$$=\int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}-4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(9-t^2\right)}{\sqrt{9-t^2}}-4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9-t^2}-4\arcsin\frac{t}{3}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной и учитывая, что $9-t^2=8-2x-x^2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=-\sqrt{8-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример 1.7.

Найти $\int \frac{(x^2+3x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}$.

Решение.

Для решения этого примера воспользуемся формулой

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ – также неопределенный коэффициент.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты, нужно продифференцировать обе части равенства (*) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

Для нашего примера $P_n(x)=x^2+3x-1$, следовательно, $n=2$.

$$\int\frac{(x^2+3x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}=(Ax+B)\sqrt{x^2-6x+12}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}. \quad (**)$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-6x+12}}=A\sqrt{x^2-6x+12}+$$
$$+\frac{(Ax+B)(2x-6)}{2\sqrt{x^2-6x+12}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+12}}.$$

Преобразуем получившееся равенство при помощи приведения к общему знаменателю (первую дробь в правой части предварительно сократим на 2).

$$x^2+3x-1=A(x^2-6x+12)+(Ax+B)(x-3)+\lambda.$$

Раскроем скобки и получим равенство двух многочленов:

$$x^2+3x-1=Ax^2-6Ax+12A+Ax^2+Bx-3Ax-3B+\lambda.$$

$$x^2+3x-1=2Ax^2-9Ax+12A+Bx-3B+\lambda$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} 1=2A \\ 3=-9A+B \\ -1=12A-3B+\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ -9\cdot\dfrac{1}{2}+B=3 \\ 12\cdot\dfrac{1}{2}-3B+\lambda=-1 \end{cases}$$

$$B=\frac{15}{2};\quad \lambda=\frac{31}{2}.$$

Подставим найденные коэффициенты в равенство (**) и вычислим интеграл в правой части. Для этого выделим полный квадрат в подкоренном выражении.

$$\int\frac{(x^2+3x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\right)\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{31}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\right)\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{31}{2}\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+3}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\right)\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{31}{2}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+12}\right|+C.$$

§ 1.3. Интегрирование иррациональных функций при помощи тригонометрических подстановок

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ можно вычислять при помощи тригонометрических подстановок следующих видов:

a) Если интеграл содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, то следует сделать подстановку $x=a\cos t$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}=a\sin t$.

b) Если интеграл содержит $\sqrt{a^2+x^2}$, то следует сделать подстановку $x=a\,\mathrm{tg}\,t$. Тогда $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$.

c) Если интеграл содержит $\sqrt{x^2-a^2}$, то следует сделать подстановку $x=\frac{a}{\cos t}$. Тогда

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Таким образом, мы видим, что при помощи этих подстановок мы избавляемся от иррациональности подынтегральных функций.

Пример 1.8.

Вычислить $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$.

Решение.

Сделаем подстановку $x=3\cos t$. Тогда

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\cos^2 t}=3\sin t;\quad dx=-3\sin t\,dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = -\int \frac{3\sin t \cdot 3\sin t}{3\cos t}dt = -3\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = -3\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt =$$

$$= -3\int \left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)dt = 3\int \left(\cos t - \frac{1}{\cos t}\right)dt =$$

$$= 3\sin t - 3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = 3\sin\arccos\frac{x}{3} - 3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 1.9.

Вычислить $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

Решение.

Сделаем подстановку $x = \frac{1}{\cos t}$.

Тогда

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t}. \quad dx = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot(-\sin t)dt = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx = \int \frac{\sin t \cdot \sin t \cdot \cos^2 t}{\cos t \cos^2 t}dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dx = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t dt = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin t + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C.$$

§ 1.4. Интегрирование дифференциального бинома

Дифференциальным биномом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

где a и b – вещественные числа, m, n и p – рациональные числа. Великий русский математик П.Л. Чебышёв доказал, что интегралы от дифференциальных биномов берутся только в трех случаях, а именно:

1) если число p – целое;

2) если число $\dfrac{m+1}{n}$ – целое;

3) если число $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

Избавиться от иррациональности можно при помощи подстановок, которые называются подстановками Чебышёва:

Случай 1. p – целое. Подстановка $x=t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей m и n.

Случай 2. $\dfrac{m+1}{n}$ – целое. Подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Случай 3. $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое. Подстановка $a+bx^n=x^n t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 1.10.

Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

Запишем интеграл в виде $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$.

В подынтегральной функции $p=\dfrac{1}{3}$, $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$.

У нас p – дробное, значит это не случай 1.

Вычисляем $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{2}=2$.

Получили целое число, значит, это случай 2.

Сделаем подстановку $1+\sqrt[4]{x}=t^3$. Тогда $x=(t^3-1)^4$,

$$dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt=12t^2(t^3-1)^3\,dt.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{t\cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt}{(t^3-1)^2} = 12\int t^3(t^3-1)dt =$$

$$= 12\int (t^6 - t^3)dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

Пример 1.11.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Решение.

Запишем интеграл в виде $\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$.

$m=-2$, $m=2$, $p=-\frac{3}{2}$. $\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$ – дробное.

$\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$ – целое.

Следовательно, это случай 3. Подстановка $1+x^2=t^2x^2$. $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

$$x^2(t^2-1)=1,\ 1+x^2=t^2x^2,\ \ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}},\ \ dx=-\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}2t\,dt,$$

$$dx=-t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt.\ \ 1+x^2=1+\frac{1}{t^2-1}=\frac{t^2-1+1}{t^2-1}=\frac{t^2}{t^2-1}.$$

$$\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx = -\int (t^2-1)\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}} t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt =$$

$$= -\int (t^2-1)t^{-3}t\,dt = -\int \frac{(t^2-1)}{t^2}dt = \int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) + C.$$

Примечание. Некоторые интегралы можно вычислить различными способами. В зависимости от способа решения могут получаться различные ответы, которые можно привести один к другому элементарными преобразованиями.

Пример 1.12.

Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение.

Этот интеграл можно вычислить несколькими способами. Рассмотрим некоторые из них.

Способ 1. Сделаем подстановку $t = \frac{1}{x}$. Тогда $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= -\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

Способ 2. Воспользуемся подстановкой Чебышёва.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

$$m = -1,\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2}.\quad \frac{m+1}{n} = 0.$$

Подстановка $x^2+1 = t^2$. $x = \sqrt{t^2-1}$, $dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}\cdot t} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + C.$$

Покажем, что этот ответ идентичен тому, что мы получили способом 1. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на ее знаменатель:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)^2+C=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

Способ 3. Сделаем тригонометрическую подстановку $x=tgt$.

Тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{1}{\cos t}$.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\operatorname{tg}t\cdot\dfrac{1}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\cos t\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\mathrm{arctgx}}{2}\right|+C.$$

Так как $tg\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2}=\dfrac{1-\cos\operatorname{arctg}x}{\sin\operatorname{arctg}x}$.

А так как $\cos\operatorname{arctg}x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\sin\operatorname{arctg}x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}x}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\cos\operatorname{arctg}x}{\sin\operatorname{arctg}x}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C.$$

Во всех трех случаях мы получили одинаковый ответ. При решении примеров самостоятельно, можно решать любым способом, учитывая, что ответ по форме может не совпадать с данным в таблице.

Примеры для самостоятельного решения.

№	Задания	Ответы

1	$\int x\sqrt{3-x}dx.$	$\frac{2}{5}\left(x^2-x-6\right)\sqrt{3-x}+C.$
2	$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}.$	$6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$
3	$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx.$	$-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\ln\left(\lvert x\rvert\left(1-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)^2\right)+C.$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right\rvert+C.$
5	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$	$\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$
6	$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$	$\frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{4}{3}}+C.$

Раздел 2. Интегрирование тригонометрических функций

§ 2.1. Интегрирование тригонометрических функций вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Для интегрирования рациональных тригонометрических дробей существует универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Эта подстановка всегда позволяет перейти от тригонометрической функции к дробно-рациональной. Вспомним формулы, выражающие $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (см. Приложение):

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Итак, универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}\end{gathered}}$$

Пример 2.1.

Вычислить $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

Сделаем замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$ Выражая $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Выразим ***x*** через новую переменную ***t*:** $x=2\operatorname{arctg}t,$ найдем $dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

Подставим $\cos x$ и dx под знак интеграла:

$$\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{2dt}{3+3t^2+1-t^2}=\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \frac{dx}{3+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 2.2.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \quad x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставим x и dx под знак интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Если подынтегральная функция содержит только четные степени синуса и косинуса или только тангенс, то проще сделать подстановку $\operatorname{tg}x=t$.

Тогда $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Используя известные тригонометрические формулы (см. Приложение), найдем $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$.

Пример 2.3.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{5+\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{5+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(5+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{5+5t^2+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{5+6t^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\frac{5}{6}+t^2} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}t + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{6}{5}}\operatorname{tg} x + C .$$

Пример2.4.

Вычислить $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

Решение.

$$\int tg^4 x dx = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^4-1+1}{t^2+1} = \int \left(\frac{(t^2+1)(t^2-1)}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \int (t^2-1)dt + \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}\operatorname{tg} x + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + x + C .$$

§ 2.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Рассмотрим четыре случая для интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **.**

1. Пусть n – целое, положительное и нечетное число. Тогда нужно сделать подстановку $\sin x = t$ **.**

2. Пусть m – целое, положительное и нечетное число. Тогда нужно сделать подстановку $\cos x = t$ **.**

3. Пусть m и n – целые неотрицательные четные числа. Тогда при вычислении интеграла нужно использовать тригонометрические формулы понижения порядка синуса и косинуса:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \text{ ; } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ .}$$

4. Пусть $m+n$ – четное отрицательное целое число. Тогда следует сделать подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 2.5.

Вычислить $\int \cos^4 x dx.$

Решение.

Здесь $m=0$, $n=4$. Следовательно, это случай 3.

Используем формулу понижения степени

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right).$$

В последнем слагаемом снова понизим степень:

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2} .$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 2.6.

Вычислить $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

Решение.

Имеем $m=3$, $n=-4$, следовательно, это случай 2.

Сделаем подстановку $\cos x = t$. Учитывая, что $\sin x dx = -dt,$ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x,$ получим

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{t^2-1}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} - \int t^{-4}dt = -\frac{1}{t}+\frac{t^{-3}}{3}+C = \frac{1}{3\cos x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 2.7.

Вычислить $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}.$

Решение.

Здесь $m=-1$, $n=-3$; $m+n=-4$. Это случай 4.

Сделаем подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{(1+t^2)^4}}{1+t^2}dt = \int \frac{(1+t^2)^2\,dt}{1+t^2} = \int (1+t^2)dt =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

§ 2.3. Интегрирование при помощи тригонометрических преобразований

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \ \int \sin ax \sin bx dx, \ \int \cos ax \cos bx dx.$$

Они вычисляются при помощи тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big).$$

Пример 2.8.

Вычислить $\int \sin 5x \cos 2x dx.$

Решение.

$$\int \sin 2x \cos 5x dx. = \frac{1}{2}\int (\sin(2x-5x) + \sin(2x+5x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin(-3x) + \sin 7x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin 7x dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

Пример 2.9.

Вычислить $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}dx.$

Решение.

Перейдем к двойному углу

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int \frac{\sin 2x}{3+\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(3+\cos 2x)}{3+\cos 2x} = -\frac{1}{2}\ln|3+\cos 2x| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения.

№	Задания	Ответы
1	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$	$\sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
2	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$	$\operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$
3	$\int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x - 1)^2}$	$\frac{1}{\cos x - 1} + C$
4	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$	$\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$
5	$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg} x + C$
6	$\int \sin 3x \sin 4x dx$	$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$

Приложение.

Алгебраические выражения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3;$$

Свойства степеней

$$a^0 = 1;$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, b > 0;$$

Логарифмы

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$a^{\log_a x} = x,\ x > 0;$$

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a \tfrac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x, x > 0;$$

$$\log_a x^{2m} = 2m \log_a |x|, x \neq 0, m \in \mathrm{N};$$

$$\log_a b = \tfrac{\log_x b}{\log_x a}, x > 0, x \neq 1, b > 0;$$

$$\log_a b = \tfrac{1}{\log_b a}, b > 0, b \neq 1;$$

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k, x > 0, k \in \mathrm{R}, k \neq 0;$$

$$\log_{a^k} x^m = \tfrac{m}{k} \log_a x, x > 0, m, k \in \mathrm{R}, k \neq 0.$$

Тригонометрические функции

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \pi n, n \in Z;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right);$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \ \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \ \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Специальная литература, 2000.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М., 2004.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для

ВТУЗов. Т. 1,2. – М.: Наука, 1996.

4. Письменный Дм. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2011.

5. Васильева Н.И., Непомнящая Е.Ю., Филиппова А.Ф. Неопределенный интеграл. Учебное пособие.– СПб.: СПбГУКиТ. 2007.

Оглавление

Раздел 1. Интегрирование иррациональных функций……………………….. 3

§ 1.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$……………………. 3

§ 1.2. Интегрирование функций, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$……………… 7

§ 1.3. Интегрирование иррациональных функций при помощи тригонометрических подстановок…………………………………………… 10

§ 1.4. Интегрирование дифференциального бинома…………………………. 11

Раздел 2. Интегрирование тригонометрических функций…………………. 16

§ 2.1. Интегрирование тригонометрических функций вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ …………………………………………......................... 16

§ 2.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ …………………………………… 18

§ 2.3. Интегрирование при помощи тригонометрических преобразований... 20

Приложение…………………………………………………………… 22

Литература……………………………………………………………… 24