## Операции над матрицами

**Цель:** закрепить навыки выполнения действий над матрицами

**Содержание работы:**

**Основные понятия**

1 Матрицей размерности m x n называется прямоугольная таблица $m \times n$ чисел $a_{ij}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Матрица называется квадратной, если m=n (n - порядок матрицы).

3 Матрица называется единичной, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой $E$ или $E_n$, где $n$ - порядок матрицы.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

4 Две матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый размер $m \times n$ и их соответствующие элементы равны. Пусть заданы две матрицы $A$ и $B$, причем размерность первой из них равна размерности второй.

5 Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

6 Суммой двух матриц одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

7 Произведением матриц называется матрица, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{in} b_{nj}$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., k$. Произведение матриц $A$ и $B$ обозначается $AB$, т.е. $C=AB$.. Пусть заданы две матрицы $A$ и $B$, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

8 Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй.

9 Матрица, получающаяся из матрицы $A$ заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице и обозначается $A^T$

10 Матрица называется обратной к матрице $A$ и обозначается $A^{-1}$, т.е. $A A^{-1} = A^{-1}A = E$.

11 Определителем n-го порядка называется число, полученное из квадратной таблицы размерности $n \times n$.

12 Определитель 2-го порядка - это число вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

13 Определители третьего порядка можно вычислять по правилу Саррюса, методом треугольника, разложением по строке или столбцу.

14 Пусть $a_{ij}$- элемент определителя $\Delta$. Минором $M_{ij}$ будем называть определитель, полученный из исходного вычеркиванием $i$- строки и j-го столбца.

15 Алгебраическим дополнением к элементу $a_{ij}$ называется число вида $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$

16 Обратную матрицу можно найти методом Гаусса $(A|E) \to \ldots \to (E|A^{-1})$ или по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

17 Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был отличен от нуля.

**Задание**

Даны матрицы A и B.

1 Выписать матрицу $A^T$, минор матрицы $M_{21}$, отвечающий элементу $a_{21}$.

2 Вычислить $|A|$ тремя способами.

3 Вычислить $3A$, $2A - 3B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

4 Вычислить $B^{-1}$ двумя способами.

5 Вычислить $4A + 5B^{-1} + A \cdot B$

**Пример выполнения:**

**Исходные данные:**

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

**Решение:**

**Задание 1** $A^T=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\qquad M_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

**Задание 2**

а) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot 0\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 3\cdot 4-1\cdot 0\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 4-2\cdot 3\cdot 3=6;$

б) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot 0\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 3\cdot 4-1\cdot 0\cdot 1-$

$-(-1)\cdot 2\cdot 4-2\cdot 3\cdot 3=6;$

в) $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot(-8)-2\cdot(9-2)+12=6$

**Задание 3**

а) $3A=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 3\\ 9 & 0 & 6\\ 3 & 12 & 9\end{pmatrix}$

б) $2A-3B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 6 & 0 & 4\\ 2 & 8 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & 15 & 6\\ -9 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-6 & 4-(-3) & 2-(-3)\\ 6-3 & 0-15 & 4-6\\ 2-(-9) & 8-3 & 6-6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-8 & 7 & 5\\ 3 & -15 & -2\\ 11 & 5 & 0\end{pmatrix}$

в) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-3) & -1\cdot(-1)+2\cdot 5+1\cdot 1 & -1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot 1 & 3\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 2 \\ 1\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot(-3) & 1\cdot(-1)+4\cdot 5+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+4\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 4 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1)+5\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 2+5\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 1+5\cdot 2+2\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-1)+1\cdot 3+2\cdot 1 & (-3)\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot 4 & (-3)\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 16 & 10 & 17 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Задание 4**

а) $B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{16}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

б) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot2+(-1)\cdot(-3)\cdot2+(-1)\cdot1\cdot1-(-1)\cdot5\cdot(-3)-(-1)\cdot1\cdot2-2\cdot1\cdot2=8$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=8;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-8;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=16;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=11;$$

$$B^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & 1 & -5 \\ 16 & 1 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

**Задание 5**

$$4A+5B^{-1}+A\cdot B=4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 12 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 22 & 13 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 20{,}625 & 12{,}875 \\ 7 & -0{,}375 & 5{,}875 \\ 11 & 38{,}625 & 31{,}875 \end{pmatrix}$$

## Задания к практической работе.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ | 2 | $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ | 4 | $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 5 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & -7 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ | 6 | $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -11 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ |
| 7 | $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ | 8 | $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 9 | $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | 10 | $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 10 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 11 | $A=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ | 12 | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 13 | $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ | 14 | $A=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 15 | $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -7 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | 16 | $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 14 & 6 & -11 \\ 5 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ | 18 | $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 6 & -4 & -5 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 19 | $A=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ | 20 | $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | $A=\begin{pmatrix}-7 & 3 & -2\\ 2 & -4 & -3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ | 22 | $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 10\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}$ |
| 23 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & 4 & -7\\ -4 & 3 & 2\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}$ | 24 | $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -7\\ 5 & -4 & -3\\ 3 & -1 & -8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10 & 4 & 2\\ -6 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ |
| 25 | $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ -7 & 6 & 10\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & -5\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ | 26 | $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & -11\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & -4\end{pmatrix}$ |
| 27 | $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 6 & 8 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 10 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & -5 & -1\end{pmatrix}$ | 28 | $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -5 & -2 & 7\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}9 & 4 & -7\\ 14 & 6 & -11\\ 5 & 3 & -5\end{pmatrix}$ |
| 29 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & 10 & -5\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$ | 30 | $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ -7 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$ |
| 31 | $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ -3 & -5 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ | 32 | $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ |