Тема №1. Функция. Способы задания. Неявная функция. Обратная функция. Классификация функций

Элементы теории множеств. Основные понятия

Одним из основных понятий современной математики является понятие множества. Оно принадлежит к числу **первичных**, не определяемых через более простые понятия Дадим описательное понятие множества.

Множество – это совокупность (собрание, набор, семейство…) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, которые образуют множество, называются ***элементами*** этого множества.

Примерами множеств являются: множество студентов вуза, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множества обозначаются **прописными буквами** латинского алфавита, а их элементы **– строчными** буквами.

Рассмотрим некоторые понятия и обозначения из теории множеств. Если x есть элемент множества X, то используется запись $x \in X$, а если x не является элементом данного множества, то пишут $x \notin X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется **подмножеством** множества A и обозначается $B \subset A$.

Если, например, A – множество всех студентов вуза, а B – множество студентов-первокурсников этого вуза, то B есть подмножество множества A, т.е. $B \subset A$.

Множества A и B называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов ($A = B$).

Объединением двух множеств A и B называют третье множество C, составленное из элементов множества A с добавлением элементов множества B, не входящих в A. Объединение обозначают так: $A \cup B$ (рис.1.1).

Пересечением, или общей частью двух множеств A и B ($A \cap B$), называют множество $D = A \cap B$, составленное из всех элементов, входящих и в A, и в B (рис.1.2).

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E = A \backslash B$ (рис.1.3).

Дополнением множества $A \subset B$ называется множество A^{B}, состоящее из всех элементов множества B, не принадлежащих A (рис. 1.4.)

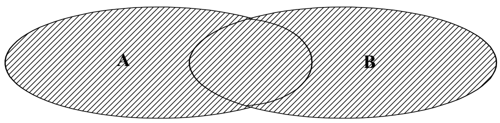

Рис. 1.1

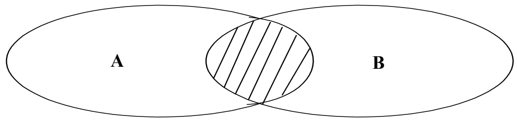

Рис. 1.2

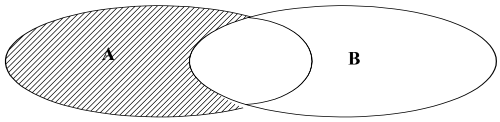

Рис. 1.3

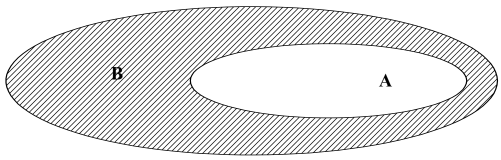

Рис. 1.4

Введенные выше обозначения во многом облегчают математические записи. Также полезно знать некоторые обозначения из математической логики:

$\forall$ – любой, для любого; $\exists$ – существует, найдется. Знаки $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ означают следующее: I $\Rightarrow$ II – из утверждения I следует (вытекает) утверждение II; I $\Leftarrow$ II – из II следует I; I $\Leftrightarrow$ II – утверждения I и II равносильны (эквивалентны).

Поясним примером.

Утверждение I: a, b – катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой c. Утверждение II: $a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Пифагора. I $\Rightarrow$ II – запись теоремы Пифагора.

Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***. Из школьного курса алгебры известны множества:

$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z_0} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

$\boldsymbol{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots; \pm n; \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{m}{n}:\ m \in Z,\ n \in N \right\}$ – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел.

Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью.

Иррациональные числа определяются как числа, выражающиеся бесконечными непериодическими десятичными дробями.

Множество ***R*** содержит рациональные и иррациональные числа.

Очевидно, что $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$, $R = Q \cup I$.

Множество действительных (вещественных) чисел геометрически изображается точками ***числовой прямой***. Напомним, что **числовой прямой**, или **числовой осью**, называется прямая с заданными на ней положительным направлением, единицей масштаба и началом отсчета (рис.1.5).

Рис. 1.5.

Модуль действительного числа. Окрестность точки

Модуль действительного числа x определяется так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отметим свойства абсолютных величин:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$;
3. $|xy| = |x|\,|y|$;
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Числовые промежутки. Множество ***X***, элементы которого удовлетворяют: неравенству $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$, называется **отрезком** (**сегментом**) и обозначается $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, неравенству $\boldsymbol{a < x < b}$ – **интервалом** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; неравенствам $\boldsymbol{a \leq x < b}$ или $\boldsymbol{a < x \leq b}$, называются **полуинтервалами** и обозначаются соответственно $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Для обозначения нижеследующих промежутков используется символ ∞: $\boldsymbol{x \geq a}$ обозначается $[\boldsymbol{a}, +\infty)$; $\boldsymbol{a < x}$ записывается так $(\boldsymbol{a}, +\infty)$; $\boldsymbol{x} \leq a$ и $\boldsymbol{x < a}$ обозначается соответственно $(-\infty, \boldsymbol{a}]$ и $(-\infty, \boldsymbol{a})$. Вся числовая ось ***R*** записывается так $\boldsymbol{R = (-\infty, +\infty)}$.

Окрестность точки определим как всякий интервал, содержащий эту точку. Чаще в анализе употребляется понятие $\boldsymbol{\varepsilon}$ – окрестности точки.

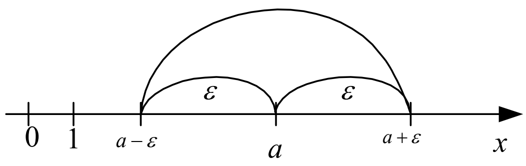

Рис. 1.6.

Пусть число $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – окрестностью точки ***a*** называют интервал $(\boldsymbol{a - \varepsilon}, \boldsymbol{a + \varepsilon})$.

Очевидно, что эта окрестность имеет длину $2\boldsymbol{\varepsilon}$ и определяется неравенствами $\boldsymbol{a - \varepsilon < x < a + \varepsilon}$ (рис.1.6).

ФУНКЦИИ

Основные понятия

При рассмотрении количественных отношений явлений реального мира приходится иметь дело с численными значениями различных величин, например времени, скорости, пути, объема производства и т.д. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других эти значения переменные. Такие величины называются соответственно постоянными и переменными.

Если ***величина*** сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного явления (процесса), то в этом случае она называется ***параметром***.

Приведем пример. При равномерном движении скорость ***v*** постоянна, время ***t*** и путь ***S*** переменные, причем $S = vt$.

Изучение окружающих нас явлений показывает, что переменные величины не всегда изменяются не независимо друг от друга, а изменение численных значений одних из них влечет за собой изменение значений других. В дальнейшем будут рассматриваться лишь пары переменных, значения одной (зависимой) из которых изменяются в зависимости от значений другой (независимой). В приведенном выше примере ***t*** – независимая переменная, ***S*** – зависимая переменная, а ***v*** – постоянная (параметр).

Подчеркнем, что в данном примере каждому значению независимой переменной соответствует только одно значение зависимой переменной.

Перейдем к понятию функции.

Если дано некоторое множество ***X*** и указан некоторый закон (правило), обозначаемый буквой ***f***, по которому каждому значению величины ***x*** из множества ***X*** ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины ***y*** множества ***Y***, то говорят, что на множестве ***X*** задана **функция** вида $y = f(x)$.

При этом ***x*** называется **независимой переменной (**или аргументом), ***y*** – **зависимой переменной.**

З а м е ч а н и е. Не следует думать, что для записи функции, ее аргумента и значения употребляются лишь буквы ***f***, ***x***, и ***y***.

Множество *X* называют **областью определения** (или **существования**) функции и обозначают $D(f)$, а множество ***Y*** обозначают $E(f)$ и называют **областью значений** функции.

Мы будем изучать действительные функции действительной переменной: т.е. множество ***X*** состоит из таких действительных чисел, которым соответствуют действительные значения функции.

Если множество ***X*** специально не оговорено, то под областью определения функции подразумевается область допустимых значений независимой переменной ***x***, то есть множество таких значений ***x***, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл (отсутствует деление на нуль, отрицательное число под знаком радикала и т.д.).

В качестве примера найдем область определения функций:

1. $y = x^2 - 2x + 5.$

При любом действительном значении независимой переменной ***x*** функция ***y*** принимает действительные значения. Следовательно, областью определения заданной функции является множество $(-\infty; +\infty)$, или $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y=\dfrac{4}{3x-1}$.

При любом действительном значении $\boldsymbol{x}$ функция $\boldsymbol{y}$ принимает действительные значения, кроме тех значений $\boldsymbol{x}$, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е., когда $3x-1=0$. Найдем это значение: $3x-1=0;\quad 3x=1;\quad x=\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, заданная функция определена (то есть принимает действительные значения) при всех значениях $\boldsymbol{x}$, кроме $x=\dfrac{1}{3}$. Отсюда следует, что областью определения заданной функции является следующее множество:

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right).$$

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

Область определения заданной функции определяется неравенством $2x-4>0$. Отсюда находим, что функция $\boldsymbol{y}$ принимает действительные значения только при $x\in(2;+\infty)$, что и является ее областью определения.

4. $y=lg\left(x^2-8x+15\right)$.

Область определения заданной функции определяется неравенством $x^2-8x+15>0$, так как известно, что логарифмы отрицательных чисел не существуют.

Решением заданного неравенства является множество $x\in(-\infty;3)\bigcup(5;+\infty)$, что и является областью определения заданной функции.

Частное значение функции $f(x)$ при $x=a$ записывают так: $f(a)$.

Например, пусть $y=3x^2-1$.

Найдем ее частные значения при $x=0$; $x=1$:

$$y(0)=\left(3x^2-1\right)\Big|_{x=0}=3\cdot 0-1=-1,$$

$$y(1)=\left(3x^2-1\right)\Big|_{x=1}=3\cdot 1-1=2.$$

Способы задания функций

Наиболее распространенными являются следующие три способа задания функции: аналитический, графический и табличный.

1. ***Аналитический способ****:* функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например: 1) $y = x^2 + sin(x+1)$; 2) $y = cos\,5x - 2$;

3) $y = \begin{cases} x^3 + 2x, & \text{если} \quad x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$

2. ***Табличный способ*** состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения аргумента ***x*** и соответствующие им значения функции ***f***(***x***). Примерами табличного задания функции являются таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и т.д.

3. ***Графический способ.*** Графики функций обычно связывают с прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. Напомним, что эта система координат представляет собой совокупность двух взаимно перпендикулярных числовых осей с общим началом отсчета *O* и общей единицей масштаба.

Графический способ состоит в изображении графика функции – множества точек (***x***, ***y***) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента ***x***, а ординаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

Основные характеристики функции

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любых значений ***x*** из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, и **нечетной**, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется функцией общего вида.

Например, функция $y = x^2$ является четной, так как

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, а функция $y = x^3$ – нечетной, так как

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

В то же время, например, функция $y = x^2 + x^3$ является функцией общего вида, так как $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3 \Rightarrow$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см., например, график функции $y = x^2$ на рис.1.7), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см., например, график функции $y = x^3$ на рис.1.8).

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на множестве ***X***, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. из неравенства $x_2 > x_1$ $(x_2 < x_1)$ следует неравенство

$$f(x_2) > f(x_1)\, f(x_2) < f(x_1).$$

Функции возрастающие или убывающие называются монотонными функциями.

Так, например, функция $y = x^2$ (см. рис. 1.7) при $x \in$ **(–∞; 0)** убывает и при $x \in$**(0; +∞)** возрастает (см. рис. 1.7).

В точке $x = 0$ функция $y = x^2$ не является ни возрастающей, ни убывающей, так как в любой ее окрестности не выполняются условия возрастания или убывания.

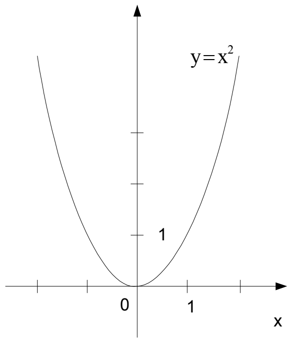

Рис. 1.7.

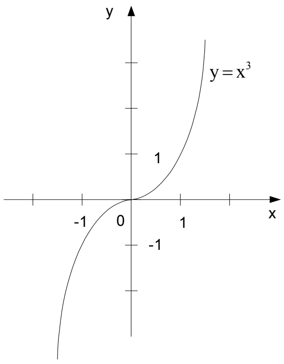

Рис. 1.8.

3. Ограниченность. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке ***X***, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in R$.

4. **Периодичность.** Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $\tau > 0$, что для всех ***x*** и $x + \tau$ из области определения выполняется равенство $f(x+\tau) = f(x)$. Наименьшее число T их всех таких чисел τ называется периодом функции $y = f(x)$.

Например, период функции $y = \cos x$ равен 2π $(T = 2\pi)$, так как для любых ***x*** области определения этой функции выполняется равенство $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Число 2π, для которого выполняется это равенство, является наименьшим. Возьмем фиксированную точку $x = 0$. Найдем значение $\cos x$ в этой точке: $\cos 0 = 1$. Это значение, равное 1, $\cos x$ может повторить только через 2π радиан. Следовательно, $\cos x$ не может иметь периода, меньшего 2π.

Элементарные функции. Классификация функций

Если функция задана аналитическим уравнением $y = f(x)$, связывающим переменные ***x***, ***y***, то есть разрешенным относительно ***y***, то такое задание функции называется **явным**.

Примерами явного задания функции являются: $y = x^2$; $y = \sin^3 x$.

Если функция задана уравнением вида $F(x; y) = 0$, связывающим переменные ***x***, и ***y***, при этом не разрешенным относительно ***y***, то такое задание функции называется **неявным**.

Примеры неявно заданных функций:

1) $x^2 + y - 9 = 0$, 2) $e^{xy} + \sin y - 2x = 0$.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $y - f(x) = 0$. Обратное не всегда возможно. Например, неявно заданную функцию уравнением $2y - 2^x + \sin 3y - 7 = 0$ нельзя задать в явном виде, т.к. последнее уравнение не разрешимо относительно ***y***.

Если ***y*** является функцией переменной u на множестве ***U*** – $y = f(u)$, а u является функцией переменной ***x*** – $u = g(x)$ с областью определения ***X*** и областью изменения ***U***, то ***y*** называется сложной функцией, или функцией от функции (суперпозицией функций) переменной ***x***. Символически сложная функция обозначается так $y = f(g(x))$.

Здесь x – независимая переменная, u – промежуточная переменная, y – сложная функция.

Например, функция $y=\sqrt{x^2+1}$ является суперпозицией функции $g=x^2+1$ и функции $y=\sqrt{g}$ на множестве $x\in(-\infty;\quad +\infty)$.

Обратная функция. Пусть дана функция $y=f(x)$ с областью определения $\boldsymbol{X}$ и областью значений $\boldsymbol{Y}$. Если каждому $y\in Y$ соответствует только одно значение $x\in X$, то на множестве $\boldsymbol{Y}$ определена функция $x=\varphi(y)$, называемая **обратной** к функции $f(x)$. Символически обратную функцию $x=\varphi(y)$

обозначают еще так: $x=f^{-1}(y)$. Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ называются взаимно обратными.

Отметим, что графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$

одинаковы. Однако если в обратной функции $x=\varphi(y)$ обозначения функции $\boldsymbol{x}$ и аргумента $\boldsymbol{y}$ изменить соответственно на $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$, то графики функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. На рисунке 1.9 показаны графики взаимно обратных функций $y=e^x$ и $y=ln\,x$ с измененным обозначением.

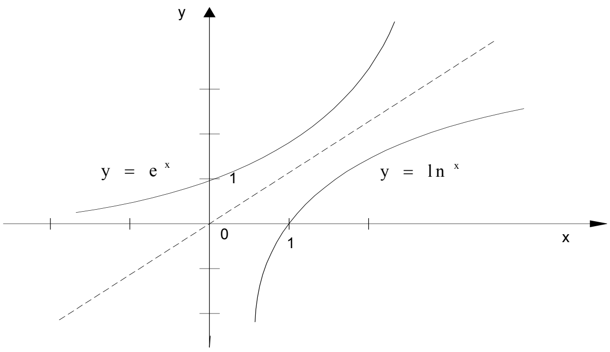

Рис. 1.9.

Чтобы найти функцию $x=\varphi(y)$, обратную к функции $y=f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x)=y$ относительно $\boldsymbol{x}$, если это возможно.

Элементарные функции. Основн кциями называются следующие функции:

a) постоянная функция $y=c,\, c\in R$;

b) степенная функция $y=x^{\alpha},\, \alpha\in R$;

c) показательная функция $y=a^x$, где $a>0,\, a\neq 1$;

d) логарифмическая функция $y=log_a\, x$, где $a>0,\, a\neq 1$;

e) тригонометрические функции $y=sin\,x,\; y=cos\,x,\; y=tgx,\; y=ctgx$;

f) обратные тригонометрические функции

$$y=arcsin\,x,\; y=arccos\,x,\; y=arctgx,\; y=arcctgx\,.$$

Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем выполнения над ними конечного числа арифметических операций и операции составления из них сложной функции, называется элементарной функцией.

Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = sin\,x + \frac{tgx^2}{5x^3}; \quad y = ln\left(2x + x^4\right).$$

Классификация функций. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над **аргументом** проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

– целая рациональная функция $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;

– дробно-рациональная функция – отношение двух многочленов;

– иррациональная функция.

Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной. К таким функциям относятся функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.